Ministerul Educației și Cercetării
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

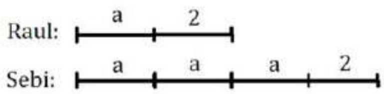
Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026

CLASA a V-a – soluții

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Sebi și Raul au mers împreună la pescuit. Fiecare dintre ei a eliberat doi pești dintre cei pe care i-a prins și i-a păstrat pe restul. Sebi a prins două treimi din numărul total de pești prinși, iar Raul a păstrat un sfert din numărul total de pești păstrați. Câți pești a prins fiecare copil?

Soluția 1. Vom folosi metoda figurativă. Reprezentăm cu un segment a numărul peștilor păstrați de Raul. Cum aceștia sunt un sfert din peștii păstrați, rezultă că Sebi a păstrat de 3 ori mai mulți, adică 3 segmente **4,5p**



Deci Raul a prins a pești și încă 2, iar Sebi a prins $3 \cdot a$ pești și încă 2. Pe de altă parte, Sebi a prins două treimi din numărul de pești prinși, iar Raul o treime, deci Sebi a prins de două ori mai mulți pești decât Raul.. **6p**

Din reprezentarea grafică rezultă că $a + a = a + 2$, așadar $a = 2$ **6p**

În concluzie, Raul a prins $2 + 2 = 4$ pești, iar Sebi a prins $4 \cdot 2 = 8$ pești **6p**

Soluția 2. Notăm cu a numărul peștilor păstrați de Raul.

Atunci Raul a prins $a + 2$ pești. **4,5p**

Cum Raul are un sfert din numărul de pești păstrați, rezultă că Sebi a păstrat $3a$ pești. **3p**

Sebi a prins două treimi din numărul de pești prinși, adică $2a + 4$ pești **3p**

Obținem $3a + 2 = 2a + 4$, de unde $a = 2$ **6p**

În concluzie, Raul a prins $2 + 2 = 4$ pești, iar Sebi a prins $4 \cdot 2 = 8$ pești **6p**

Problema 2. Câtul împărțirii numărului 2024 la $\overline{ab}$ este $\overline{abb}$. Aflați restul acestei împărțiri.

Gazeta Matematică

Soluție. $2024 = \overline{ab} \cdot \overline{abb} + r$, unde $r < \overline{ab}$ **4,5p**

Pentru $\overline{ab} \geq 15$, obținem $2024 \geq \overline{ab}^2 \cdot 10 \geq 15^2 \cdot 10 = 2250$, nu se poate. Așadar $\overline{ab}$ poate fi 10, 11, 12, 13 sau 14 .... **3p**

Analizând fiecare din cele 5 situații în parte, obținem $\overline{ab} = 14$ și $2024 = 14 \cdot 144 + 8$, deci restul căutat este 8.. **15p**

Observație. Pentru fiecare situație analizată se acordă câte 3 puncte.

Problema 3. Pentru fiecare număr natural m notăm suma cifrelor sale cu $s(m)$.

a) Arătați că nu există niciun număr natural n de 3 cifre pentru care $s(n)$ și $s(n+4)$ sunt multipli de 6.

b) Determinați numerele naturale p de 3 cifre pentru care $s(p)$ și $s(p+4)$ sunt multipli de 7.

Soluție. a) Fie $n = \overline{abc}$ astfel încât $a + b + c = M_6$. Efectuăm o analiză pe cazuri pentru a arăta că, în niciunul dintre cazuri, $s(n+4)$ nu poate fi multiplu de 6:

(i) dacă $c \leq 5$, atunci $s(n+4) = s(n) + 4 = M_6 + 4$, deci $s(n+4) \neq M_6$ **3p**

(ii) dacă $c \geq 6$ și $b < 9$, atunci $s(n+4) = a + b + 1 + c - 6 = M_6 + 1$, deci $s(n+4) \neq M_6$ .. **3p**

(iii) dacă $c \geq 6, b = 9, a < 9$, atunci $s(n+4) = (a+1) + (b-9) + (c-6) = M_6 + 4 \neq M_6$ .. **3p**

(iv) dacă $c \geq 6, a = b = 9$, cum $s(n) \vdots 6$ rezultă că $n = 996$, deci $n + 4 = 1000 \neq M_6$ **1,5p**

b) Fie $p = \overline{abc}$ astfel încât $a + b + c = M_7$. Analizăm cazurile:

(i) dacă $c < 6$, atunci $s(p+4) = s(p) + 4 = M_7 + 4 \neq M_7$ **3p**

(ii) dacă $c \geq 6$ și $b < 9$, atunci $s(p+4) = a + b + 1 + c - 6 = M_7 + 2 \neq M_7$ **3p**

(iii) dacă $c \geq 6, b = 9$ și $a < 9$, atunci $s(p+4) = a + 1 + b - 9 + c - 6 = s(p) - 14 = M_7$ pentru orice p cu $s(p) = M_7$, de unde obținem că p poate fi 399, 498, 597 sau 696 .... **3p**

(iv) dacă $c \geq 6, a = b = 9$, atunci p poate lua valorile 699, 799, 899 sau 999, însă niciunul dintre aceste numere nu are proprietatea că $s(p) = M_7$ **3p**

Problema 4. Se consideră un tabel cu 4 linii și 4 coloane pe care îl completăm cu numerele de la 1 la 13 astfel încât pe prima linie să apară același număr în fiecare pătrățică, iar pe ultimele trei linii celelalte 12 numere.

a) Determinați valorile numărului de pe prima linie astfel încât suma numerelor de pe fiecare linie a tabelului să fie aceeași. Pentru fiecare valoare găsită construiți un tabel corespunzător.

b) Determinați valorile numărului de pe prima linie astfel încât suma numerelor de pe fiecare coloană a tabelului să fie aceeași. Pentru fiecare valoare găsită construiți un tabel corespunzător.

Soluție. a) Notăm numărul scris pe prima linie cu x. Atunci suma numerelor de pe prima linie este egală cu $4 \cdot x$, iar suma numerelor scrise în toate cele 16 pătrățele va fi egală cu $1 + 2 + \ldots + 13 + 3x$. Obținem egalitatea $16 \cdot x = 91 + 3 \cdot x$, de unde rezultă că $x = 7$.... **4,5p**

Un exemplu de tabel este:

7	7	7	7
13	1	4	10
5	8	6	9
3	12	11	2

.... **6p**

b) Notăm cu S suma numerelor de pe fiecare coloană a tabelului. Atunci $91 + 3 \cdot x = 4 \cdot S$, de unde obținem că x poate fi egal cu $3, 7$ sau 11 .... **3p**

3	3	3	3
13	12	11	10
8	6	9	7
1	4	2	5

7	7	7	7
13	12	11	10
5	8	6	9
3	1	4	2

11	11	11	11
13	12	10	9
6	5	8	7
1	3	2	4

Pentru fiecare exemplu corect de tabel se acordă câte 3 puncte **9p**