



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026

CLASA a VI-a – soluții

Punctaj din oficiu ..... 10 p

**Problema 1.** Considerăm mulțimile:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1000 \text{ și } n \text{ dă restul } 2 \text{ la împărțirea cu } 3\},$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1000 \text{ și } n \text{ dă restul } 1 \text{ la împărțirea cu } 7\}.$$

a) Care este cel mai mic element al mulțimii  $A \cap B$ ?

b) Aflați numărul elementelor mulțimii  $A \cup B$ .

*Soluție.* a)  $A = \{2, 5, 8, \dots\}$  și  $B = \{1, 8, 15, \dots\}$ , deci numărul cerut este  $m = 8 \dots \dots \dots$  **4,5p**

b) Elementele mulțimii  $A$  sunt de forma  $n = 3m + 2$ , cu  $m \in \mathbb{N}$ . Din condiția  $3m + 2 \leq 1000$ , obținem  $m \leq 332$ , deci  $m$  ia valorile  $0, 1, 2, \dots, 332$ . Rezultă că  $A$  are 333 de elemente..... **3p**

Elementele mulțimii  $B$  sunt de forma  $n = 7p + 1$ , cu  $p \in \mathbb{N}$ . Din condiția  $7p + 1 \leq 1000$ , obținem  $p \leq 142$ , deci  $p$  ia valorile  $0, 1, 2, \dots, 142$ . Rezultă card  $B = 143 \dots \dots \dots$  **3p**

Dacă  $x \in A \cap B$ , atunci  $x \leq 1000$  și  $x - 8$  este divizibil cu 3 și cu 7, deci cu 21..... **3p**

Reciproc, dacă  $21 \mid x - 8$  și  $x \leq 1000$ , atunci  $x - 8$  este divizibil cu 3 și cu 7, deci  $x$  dă la împărțirea cu 3 și cu 7 aceleași resturi ca 8, așadar  $x \in A \cap B \dots \dots \dots$  **3p**

Reiese că  $x = 21k + 8 \leq 1000$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , deci  $0 \leq k \leq 47$ , iar  $A \cap B$  are 48 de elemente .... **3p**

Numărul elementelor mulțimii  $A \cup B$  se obține adunând numărul elementelor mulțimii  $A$  cu numărul elementelor mulțimii  $B$  și scăzând numărul elementelor comune. Rezultă că  $A \cup B$  are 428 de elemente ..... **3p**

**Problema 2.** Determinați numărul natural prim  $x$  și numărul natural nenul  $y$  având proprietatea  $\frac{x}{2y} = \frac{x+1}{x+y+8}$ .

*Soluție.* Relația din enunț se scrie sub forma  $x(x+y+8) = 2y(x+1)$ , (\*)..... **1,5p**

Rezultă că  $x$  divide produsul  $2 \cdot y \cdot (x+1)$ . Cum numărul  $x$  este prim, înseamnă că  $x$  divide 2,  $x$  divide  $y$  sau  $x$  divide  $x+1 \dots \dots \dots$  **3p**

În primul caz obținem  $x = 2$  și  $y = 5 \dots \dots \dots$  **6p**

În al doilea caz, fie  $y = dx$ , unde  $d$  este un număr natural nenul. Înlocuind în (\*), deducem după calcule că  $x+8 = d(x+2)$ . Este evident că nu putem avea  $d = 1 \dots \dots \dots$  **3p**

Atunci  $x+8 \geq 2(x+2)$ , prin urmare  $x \leq 4$ . Cum  $x$  este prim, înseamnă că  $x \in \{2, 3\}$ .

Dacă  $x = 2$ , atunci  $d = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$ . Dacă  $x = 3$ , atunci  $d = \frac{11}{5} \notin \mathbb{N}$ . Așadar, nu obținem soluții în acest caz ..... **3p**

În cel de-al treilea caz, din  $x \mid x+1$  rezultă că  $x \mid (x+1) - x$ , așadar  $x \mid 1$ . Cum  $x$  este prim, nu obținem soluții nici în acest caz ..... **6p**

*Soluție alternativă.* Relația din enunț se scrie sub forma  $x^2 + 8x = y(x+2) \dots \dots \dots$  **4,5p**

Rezultă că  $x+2$  divide  $x^2 + 8x$ , prin urmare  $x+2$  divide  $(x^2 + 8x) - x(x+2) = 6x \dots$  **6p**

În continuare,  $x+2$  divide  $6(x+2) - 6x = 12 \dots \dots \dots$  **6p**

Cum  $x$  este număr natural prim, singura valoare admisibilă este  $x = 2 \dots \dots \dots$  **3p**

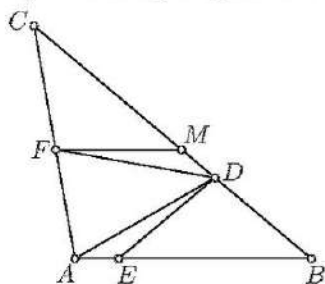
Pentru  $x = 2$ , din relația  $x^2 + 8x = y(x+2)$  obținem  $y = 5 \dots \dots \dots$  **3p**

*Notă.* Perechile  $(x, y)$  de numere naturale (cu  $y$  nenul) având proprietatea din enunț sunt  $(1, 3)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(4, 8)$  și  $(10, 15)$ .

**Problema 3.** Triunghiul  $ABC$  este isoscel și are  $\angle BAC = 100^\circ$ . Cercul de centru  $C$  și rază  $CA$  taie segmentul  $BC$  în  $D$ , cercul de centru  $D$  și rază  $DB$  taie segmentul  $AB$  în punctul interior  $E$  și cercul de centru  $D$  și rază  $DA$  taie segmentul  $AC$  în punctul interior  $F$ .

a) Arătați că  $CF = DE$ .

b) Paralela prin punctul  $F$  la dreapta  $AB$  taie latura  $BC$  în  $M$ . Arătați că  $MD = AE$ .



*Soluție.* a) Arătăm că  $\triangle BDA \equiv \triangle CFD$ , (1) ..... 1,5p

În triunghiul  $ABC$  avem  $\angle ABC = \angle ACB = 40^\circ$  ..... 3p

În triunghiul isoscel  $CAD$  avem  $\angle CAD = \angle CDA = \frac{180^\circ - \angle ACD}{2} = 70^\circ$  ..... 3p

Reiese  $\angle DAB = \angle CAB - \angle CAD = 30^\circ$ ,  $\angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle DBA = 110^\circ$ ,  $\angle CFD = 180^\circ - \angle AFD = 110^\circ$ . 3p

Astfel  $DA = DF$ ,  $\angle BDA = \angle CFD$  și  $\angle ABD = \angle FCD$  deci, conform cazului de congruență LUU, afirmația (1) este demonstrată ..... 3p

b) Din  $FM \parallel AB$  rezultă  $\angle CFM = \angle CAB = 100^\circ$ . Astfel  $\angle DFM = \angle DFC - \angle MFC = 10^\circ$  ..... 3p

În triunghiul isoscel  $DEB$  avem  $\angle DEB = \angle DBA = 40^\circ$ , de unde  $\angle EDB = 100^\circ$ , deci  $\angle ADE = \angle ADB - \angle EDB = 10^\circ$  ..... 3p

Deoarece  $\angle MFD = \angle EDA$ ,  $FD = DA$  și, din congruența (1),  $\angle MDF = \angle EAD$ , obținem  $\triangle MFD \equiv \triangle EDA$  (ULU), de unde  $MD = AE$  ..... 3p

**Problema 4.** Vom numi *lente* numerele naturale nenule  $L$  care au cel puțin patru divizori și, dacă  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_p = L$  sunt divizorii lui  $L$ , atunci fiecare număr din șirul divizorilor, începând cu al patrulea, este mai mic sau egal decât suma a trei dintre divizorii precedenți.

a) Arătați că 72 este un număr lent.

b) Demonstrați că produsul oricăror două numere lente este tot un număr lent.

*Soluție.* a) Divizorii lui 72 sunt  $1 < 2 < 3 < 4 < 6 < 8 < 9 < 12 < 18 < 24 < 36 < 72$ , iar  $4 < 1 + 2 + 3$ ,  $6 < 2 + 3 + 4$ ,  $8 < 3 + 4 + 6$ , etc. .... 4,5p

b) Fie  $M$  și  $N$  două numere lente. Atunci orice divizor al lui  $MN$  este de forma  $mn$ , unde  $m \mid M$  și  $n \mid N$  ..... 3p

Dacă  $m$  nu este unul dintre cei mai mici trei divizori ai lui  $M$ , atunci  $m \leq m_1 + m_2 + m_3$ , unde  $m_1 < m_2 < m_3 < m$  sunt divizori ai lui  $M$ . Reiese  $mn \leq m_1n + m_2n + m_3n$ , iar  $m_1n < m_2n < m_3n < mn$  sunt divizori ai lui  $MN$ . Analog, dacă  $n$  nu este unul dintre cei mai mici trei divizori ai lui  $N$ . Astfel, în acest caz,  $mn$  este mai mic sau egal decât suma a trei divizori ai numărului  $MN$  care îl preced ..... 6p

Pentru cazurile rămase, observăm că un număr lent  $L$  este divizibil cu 6. În caz contrar, dacă  $2 \nmid L$ , atunci divizorii precedenți lui  $L$  sunt cel mult  $\frac{L}{3}, \frac{L}{5}, \frac{L}{7}$ , deci au suma cel mult  $L\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) < L$ , iar dacă  $3 \nmid L$ , atunci divizorii precedenți lui  $L$  sunt cel mult  $\frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{5}$ , deci au suma cel mult  $L\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) < L$  ..... 6p

Rezultă că rămân de analizat cazurile  $m, n \in \{1, 2, 3\}$ , deci  $mn \in \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ . Dacă  $mn \leq 3$  atunci  $mn$  este unul dintre primii trei termeni ai șirului divizorilor, dacă  $mn \in \{4, 6\}$  atunci  $mn \leq 1 + 2 + 3$ , iar dacă  $mn = 9$ , atunci  $mn \leq 2 + 3 + 6$  ..... 3p