MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană/a Sectoarelor Municipiului Bucureşti, 2026

CLASA a VII-a – soluţii

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. Determinaţi numerele reale x pentru care $\{x\} - \{2026 \cdot x\} = x$.
(*Notația* $\{a\}$ *reprezintă partea fracționară a numărului real* a.)

Soluție. Știm că $x = [x] + \{x\}$ **1,5p**

Ecuația dată se reduce la $-\{2026x\} = [x]$. Dar $0 \leq \{2026x\} < 1$, deci $-1 < -\{2026x\} \leq 0$, pe când $[x] \in \mathbb{Z}$ **6p**

Deducem că soluţiile ecuaţiei date sunt numerele reale care verifică egalitățile $[x] = 0$ și $\{2026x\} = 0$ **3p**

De aici reiese că, pe de-o parte $2026x \in \mathbb{Z}$, pe de altă parte $0 \leq x < 1$. **6p**

Atunci $2026x = k \in \mathbb{Z}$ implică $x = \dfrac{k}{2026}$, $k \in \mathbb{Z}$, iar $0 \leq x < 1$ revine la $0 \leq \dfrac{k}{2026} < 1$, deci la $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2025\}$. Conchidem că mulţimea soluţiilor este $\left\{0, \dfrac{1}{2026}, \dfrac{2}{2026}, \ldots, \dfrac{2025}{2026}\right\}$ **6p**

Problema 2. a) Arătaţi că există numere naturale nenule a şi b pentru care $\sqrt{a^2 + 2026 \cdot b^2}$ este număr raţional.

b) Care este cel mai mic număr natural nenul b pentru care există un număr natural a astfel ca $\sqrt{a^2 + 2026 \cdot b^2}$ să fie număr raţional?

Gazeta Matematică

Soluție. a) Un exemplu de pereche (a, b) de numere naturale nenule care îndeplinește condițiile din enunţ este $(2025, 2)$. Într-adevăr, $2025^2 + 2026 \cdot 2^2 = 2025^2 + 4 \cdot 2025 + 4 = (2025 + 2)^2 = 2027^2$, deci $\sqrt{2025^2 + 2026 \cdot 2^2} = 2027 \in \mathbb{Q}$. **6p**

b) Vom arăta că $b = 2$ este numărul cerut **3p**

Așa cum am văzut, pentru $b = 2$ există un a convenabil, și anume $a = 2025$. **3p**

Rămâne să mai arătăm că pentru $b = 1$ nu există un a convenabil.

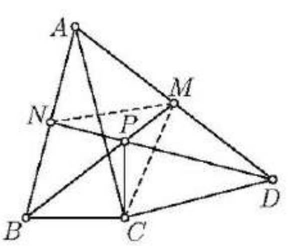
Condiția ca $\sqrt{a^2 + 2026b^2}$ să fie număr rațional este echivalentă cu $a^2 + 2026b^2$ să fie pătrat perfect. **1,5p**

Presupunând că ar exista $c \in \mathbb{N}$ pentru care $a^2 + 2026 = c^2$, ar trebui ca a și c să fie de aceeași paritate. Dar în acest caz $c^2 - a^2 = (c - a)(c + a)$ ar fi multiplu de 4, în vreme ce 2026 nu este multiplu de 4. Contradicția obținută arată că pentru $b = 1$ nu există un a convenabil, deci cel mai mic număr b cu proprietatea din enunţ este $b = 2$. **9p**

Problema 3. Considerăm triunghiul ABC cu $AB = AC = 2 \cdot BC$. Perpendiculara dusă în punctul C pe dreapta AC intersectează mediatoarea segmentului AB în punctul D. Fie M mijlocul segmentului AD, N mijlocul segmentului AB și P intersecția dreptelor BM și DN.

a) Demonstrați că $PC \perp CB$.

b) Demonstrați că $DC = 2 \cdot PC$.



Soluție. a) Ne propunem să arătăm că $\triangle BPN \equiv \triangle BPC$ **1,5p**

Pentru aceasta observăm că $CM = \frac{1}{2}AD = NM$, ca mediane în triunghiurile dreptunghice ACD și AND. Rezultă astfel $\triangle BNM \equiv BCM$ (LLL), deci $\angle NBM = \angle CBM$ **6p**

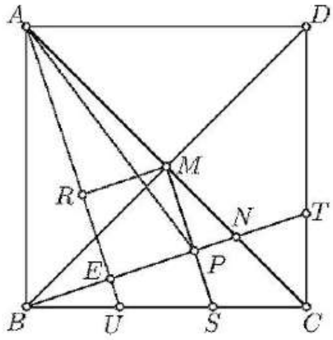
Deducem $\triangle BPN = \triangle BPC$ (LUL), deci $\angle PCB = \angle PNB = 90°$ **6p**

b) Arătăm că $\triangle DCP \sim \triangle ACB$, (1), ceea ce implică $\dfrac{DC}{CP} = \dfrac{AC}{CB} = 2$ **3p**

Avem $\angle PCD = 90° - \angle PCA = \angle ACB$ și $\angle DPC = 180° - \angle NPC = 180° - (360° - \angle PNB - \angle PCB - \angle NBC) = \angle NBC$, ceea ce dovedește relația (1) **6p**

Problema 4. Considerăm un triunghi dreptunghic isoscel ABC și notăm cu M mijlocul ipotenuzei AC, cu N mijlocul segmentului CM, cu P piciorul perpendicularei din M pe BN, cu E piciorul perpendicularei din A pe BN și cu R piciorul perpendicularei din M pe AE.

Arătați că R este centrul de greutate al triunghiului ABP.



Soluție. Avem $AC = 2 \cdot AM = 4 \cdot CN$ **1,5p**

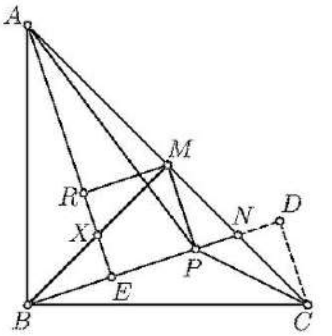
Deoarece $MR \parallel BN$, avem $\dfrac{AR}{AE} = \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{2}{3}$............. **3p**

Astfel, pentru a obține concluzia, este suficient să arătăm că AE este mediană în triunghiul ABP. Cum $AE \perp BN$, proprietatea precedentă se reduce la a dovedi că E este mijlocul segmentului BP **3p**

Construim pătratul $ABCD$ și considerăm punctele $U = AE \cap BC$, $T = BN \cap CD$. Atunci $\triangle TNC \sim \triangle BNA$ (TFA), deci $\dfrac{AB}{CT} = \dfrac{AN}{NC} = 3$. Apoi $\angle BAU = 90° - \angle TBA = \angle TBC$ și obținem $\triangle BAU \equiv \triangle CBT$ (CU), de unde $BC = 3BU$, (1) .. **6p**

Din $AU \parallel MS$ și $AC = 2AM$ reiese că MS este linie mijlocie în triunghiul CAU, de unde $CS = SU$ **6p**

Folosind (1) reiese că $BU = US = SC$, ceea ce arată că EU este linie mijlocie în triunghiul BSP, deci E este mijlocul segmentului BP **3p**



Altă soluție. Ca mai sus, este suficient să arătăm că E este mijlocul segmentului BP .... **1,5 + 3 + 3p**

Construim $CD \perp BN$, $D \in BN$. Atunci $\angle ABE = 90° - \angle DBC = \angle BCD$, deci $\triangle ABE \equiv \triangle BCD$ (IU), de unde reiese $BE = CD$ **6p**

Apoi $\triangle MPN \equiv \triangle CDN$ (IU), deci $CD = MP$ **3p**

Avem $\angle MBP = 90° - \angle BMP = \angle PMN$, de unde reiese $\triangle BMP \sim \triangle MNP$ **3p**

Obținem $\dfrac{BP}{MP} = \dfrac{BM}{MN} = \dfrac{MC}{MN} = 2$, de unde $BP = 2MP = 2CD = 2BE$, deci E este mijlocul segmentului BP **3p**

Altă soluție. Ca mai sus, arătăm că E este mijlocul segmentului BP .... **1,5 + 3 + 3p**

Fie X mijlocul segmentului BM. Atunci $AB = BC$, $BX = \dfrac{1}{2}BM = \dfrac{1}{2}CM = CN$ și $\angle ABX = 45° = \angle BCN$, deci $\triangle AXB \equiv \triangle BNC$ (LUL) **6p**

Rezultă $\angle ABE + \angle BAX = \angle ABE + \angle CBN = 90°$, deci $AX \perp BP$, ceea ce arată că punctul X se află pe AE. Cum X este mijlocul segmentului BM și $XE \parallel MP$, reiese că XE este linie mijlocie în triunghiul BPM, deci E este mijlocul segmentului BP **9p**