MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2026

CLASA a VIII-a – soluții

Punctaj din oficiu .... **10 p**

Problema 1. a) Determinați numerele reale x pentru care numerele $x+\sqrt{3}$ și $3x^2+\sqrt{3}$ sunt raționale.

b) Arătați că nu există niciun număr real y astfel încât numerele $y+\sqrt{3}$ și $3y^2+y^3+\sqrt{3}$ să fie raționale.

Soluție. a) Din $x+\sqrt{3}=a\in\mathbb{Q}$ rezultă $x=a-\sqrt{3}$ și astfel $3x^2+\sqrt{3}=3(a-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}=3a^2+9+\sqrt{3}\cdot(1-6a)$ **3p**

Numărul $3x^2+\sqrt{3}$ este rațional dacă și numai dacă $1-6a=0$, adică $a=\frac{1}{6}\in\mathbb{Q}$. **3p**

Există, așadar, un singur număr real care verifică enunțul, anume $x=\frac{1}{6}-\sqrt{3}$......... **1,5p**

b) Presupunem că există $y\in\mathbb{R}$ cu $y+\sqrt{3}=a\in\mathbb{Q}$ și $3y^2+y^3+\sqrt{3}=b\in\mathbb{Q}$. **3p**

Deducem că $y=a-\sqrt{3}$ și astfel $b=3(a-\sqrt{3})^2+(a-\sqrt{3})^3+\sqrt{3}=3a^2+9+\sqrt{3}\cdot(1-6a)+a^3-3a^2\sqrt{3}+9a-3\sqrt{3}=\underbrace{a^3+3a^2+9a+9}_{\in\mathbb{Q}}+\sqrt{3}\cdot\left(-3a^2-6a-2\right)\in\mathbb{Q}$. **6p**

Rezultă $3a^2+6a+2=0$, de unde $a=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}}{3}\notin\mathbb{Q}$, deci presupunerea este falsă. **6p**

Problema 2. Arătați că numărul $\sqrt{(\overline{xxx}-y)^2+(\overline{yyy}-x)^2}$ este irațional, oricare ar fi cifrele distincte nenule x și y.

Gazeta Matematică

Soluție. Notăm $A=(\overline{xxx}-y)^2+(\overline{yyy}-x)^2$. Arătăm că A nu este pătrat perfect.

La împărțirea unui pătrat perfect la 11 se poate obține restul 0, 1, 3, 4, 5 sau 9, $(*)$ **6p**

Avem $(\overline{xxx}-y)^2=(111x-y)^2=(110x+x-y)^2=(M_{11}+x-y)^2=M_{11}+(x-y)^2$ **3p**

Analog, $(\overline{yyy}-x)^2=M_{11}+(y-x)^2$, deci $A=(\overline{xxx}-y)^2+(\overline{yyy}-x)^2=M_{11}+2(x-y)^2$ **3p**

Din $(*)$ rezultă că $A\in\{M_{11},M_{11}+2,M_{11}+6,M_{11}+7,M_{11}+8,M_{11}+10\}$ **6p**

Cum $x\neq y$, rezultă că $A\neq M_{11}$, deci prin împărțirea lui A la 11 se pot obține doar resturile 2, 6, 7, 8 sau 10, iar din $(*)$ rezultă că A nu este pătrat perfect **3p**

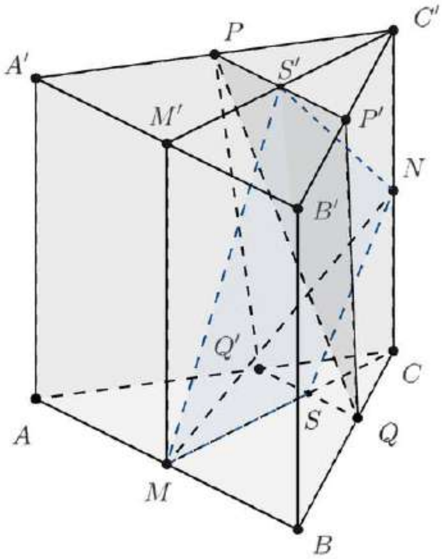
Ca urmare, $\sqrt{A}=\sqrt{(\overline{xxx}-y)^2+(\overline{yyy}-x)^2}\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. **1,5p**

Problema 3. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată, M, N, P mijloacele muchiilor AB, CC', respectiv $A'C'$ și punctul Q pe muchia BC, astfel încât $AB=18$ cm, $AA'=3\sqrt{3}$ cm și $BQ=10$ cm.

a) Arătați că $AB\perp(CMC')$.

b) Arătați că dreptele MN și PQ sunt perpendiculare.

Soluție. a) Cum triunghiul ABC este echilateral și M este mijlocul lui AB, obținem $CM \perp AB$. Din $C'C \perp (ABC)$, $AB \subset (ABC)$, deducem $C'C \perp AB$ și cum CM, CC' sunt drepte concurente din planul (CMC'), deducem $AB \perp (CMC')$. **6p**



b) Fie P' mijlocul lui $B'C'$, M' mijlocul lui $A'B'$, $C'M' \cap PP' = \{S'\}$, $QQ' \parallel AB$, Q' pe muchia AC și $CM \cap QQ' = \{S\}$.

Cum $PQ \subset (QP'P)$, este suficient să arătăm că $MN \perp (QP'P)$. Din $AB \perp (CMC')$, avem $AB \perp NM$ și cum $QQ' \parallel AB$, obținem $MN \perp QQ'$. **3p**

Vom arăta că $SS' \perp MN$ și pentru aceasta, că patrulaterul $MSNS'$ este ortodiagonal. Cum $NC' = NC$ și $S'C' = M'S'$, avem: $MS^2 + S'N^2 = SN^2 + MS'^2 \Leftrightarrow MS^2 + S'C'^2 + C'N^2 = SC^2 + NC^2 + MM'^2 + M'S'^2 \Leftrightarrow MS^2 = SC^2 + MM'^2$. **6p**

Dar $CM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ cm și $\dfrac{MS}{CM} = \dfrac{BQ}{BC} \Rightarrow \dfrac{MS}{9\sqrt{3}} = \dfrac{10}{18} \Rightarrow MS = 5\sqrt{3}$ cm, de unde $SC = 4\sqrt{3}$ cm și cum $MM' = 3\sqrt{3}$ cm, avem $MS^2 = SC^2 + MM'^2 \Leftrightarrow (5\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2$, relație adevărată. Obținem, astfel, că patrulaterul $MSNS'$ este ortodiagonal, deci $MN \perp SS'$ și cum $MN \perp QQ'$, rezultă $MN \perp (PP'Q)$ **6p**

Așadar, $MN \perp PQ$. **1,5p**

Problema 4. Un cub cu latura de lungime $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell > 0$, este împărțit în 297 de cuburi, dintre care unul are latura de lungime x, $x \neq 1$, și restul au latura de lungime 1.

a) Arătați că $\ell \in \mathbb{N}$.

b) Determinați valoarea numărului ℓ.

Soluție. a) Cuburile în care este împărțit cubul cu latura ℓ au fețele paralele cu fețele acestuia.

Fie d o dreaptă care intersectează cubul mare, paralelă cu o muchie a cubului, care nu intersectează cubul de latură x, atunci d va intersecta cubul mare după un segment $MN = \ell$ și $a, a \in \mathbb{N}^*$, cuburi de latură 1 , deci $\ell = a \cdot 1 \in \mathbb{N}^*$. **6p**

b) Considerând o dreaptă d' paralelă cu o muchie a cubului mare, care intersectează cubul de latură x, atunci $\ell = x + k \cdot 1, k \in \mathbb{N}$ și de aici $x \in \mathbb{N}^*$. **3p**

Egalând volumele, obținem $\ell^3 = x^3 + 296 \Leftrightarrow (\ell - x)\left(\ell^2 + \ell \cdot x + x^2\right) = 2^3 \cdot 37$, unde $\ell, x \in \mathbb{N}^*, x \neq 1$. **3p**

Pentru $x = 2$, obținem $\ell^3 = 304$, care nu are soluții naturale, deoarece $6^3 = 216 < 304 < 343 = 7^3$, deci $x \geq 3$. Dacă $\ell - x \geq 4 \Rightarrow 296 = \ell^3 - x^3 \geq (x+4)^3 - x^3 = 12x^2 + 48x + 64 > 296$ pentru $x \geq 3$, deci nu avem soluție. **3p**

Deci $\ell - x \mid 2^3 \cdot 37$ și $\ell - x \leq 3 \Rightarrow \ell - x \in \{1, 2\}$. Dacă $\ell - x = 1 \Rightarrow (x+1)^3 = x^3 + 296 \Rightarrow 3x^2 + 3x = 295$ care nu are soluții în $\mathbb{N}$. **3p**

Dacă $\ell - x = 2 \Rightarrow (x+2)^3 = x^3 + 296 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x = 288 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 48 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 49$, deci $x = 6$, de unde $\ell = 8$. **4,5p**