CONCURSUL NAȚIONAL OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA

Etapa județeană – 21 martie 2026

Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

Problema 1:

a) Dacă *x* reprezintă un număr rațional pozitiv și $\sqrt{5x^2+31x+79}-\sqrt{71+31x+5x^2}=8$, atunci calculați $\sqrt{5x^2+31x+79}+\sqrt{71+31x+5x^2}$.

b) Considerăm numerele $a=\sqrt{11+4\sqrt{7}}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}$, $b=\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ și $c=\sqrt{21+8\sqrt{5}}+\sqrt{21-8\sqrt{5}}$. Ordonați crescător numerele *a*, *b* și *c*.

Barem de evaluare și notare:

a) $\sqrt{5x^2+31x+79}+\sqrt{71+31x+5x^2}=\frac{(5x^2+31x+79)-(71+31x+5x^2)}{\sqrt{5x^2+31x+79}-\sqrt{71+31x+5x^2}}$ **4p**

$=\frac{8}{\sqrt{5x^2+31x+79}-\sqrt{71+31x+5x^2}}=\frac{8}{8}=1$ **4p**

b) $\boldsymbol{a}=\sqrt{11+4\sqrt{7}}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}=\sqrt{4+4\sqrt{7}+7}+\sqrt{4-4\sqrt{7}+7}=$

$=\sqrt{(2+\sqrt{7})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}=|2+\sqrt{7}|+|2-\sqrt{7}|=$

$=2+\sqrt{7}+\sqrt{7}-2=2\sqrt{7}$ **5p**

$\boldsymbol{b}=\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{25+10\sqrt{2}+2}+\sqrt{25-10\sqrt{2}+2}=$

$=\sqrt{(5+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}=|5+\sqrt{2}|+|5-\sqrt{2}|=$

$=5+\sqrt{2}+5-\sqrt{2}=10$ **5p**

$\boldsymbol{c}=\sqrt{21+8\sqrt{5}}+\sqrt{21-8\sqrt{5}}=\sqrt{16+8\sqrt{5}+5}+\sqrt{16-8\sqrt{5}+5}=$

$=\sqrt{(4+\sqrt{5})^2}+\sqrt{(4-\sqrt{5})^2}=|4+\sqrt{5}|+|4-\sqrt{5}|=4+\sqrt{5}+4-\sqrt{5}=8$ **5p**

Cum $2\sqrt{7}<2\sqrt{9}=2\cdot 3=6$, obținem că $a<6$ **1p**

Deci, $a<c<b$ **1p**

Str. 1 Decembrie, Nr.5, Bistrița, Jud. Bistrița-Năsăud, Cod 420080
Tel: +4 0263 213 529, Fax: +4 0263 216 654, E-mail: isjbn@isjbn.ro
www.isjbn.ro

Problema 2:

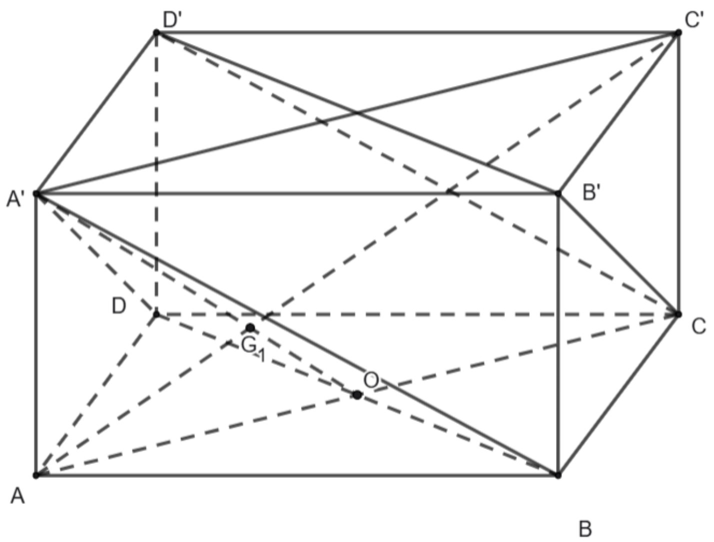
Fie *ABCDA'B'C'D'* un paralelipiped dreptunghic.

a) Arătați că $(A'BD)||(CB'D')$

b) Dacă $AC' \cap (A'BD) = \{G_1\}$, arătați că G_1 este centrul de greutate al triunghiului $A'BD$

Gazeta Matematică 12/2025

Barem de evaluare și notare:



a) Desen corect **2p**

$BB'||DD'$ și $BB' = DD' \Rightarrow BDD'B'$ paralelogram $\Rightarrow BD||B'D', BD \subset (CB'D') \Rightarrow BD||(CB'D')$ .. **4p**

$DC||A'B'$ și $DC = A'B' \Rightarrow A'B'CD$ paralelogram$\Rightarrow A'D||B'C, B'C \subset (CB'D') \Rightarrow A'D||(CB'D')$ ... **4p**

$$\left.\begin{array}{r} BD||(CB'D') \\ A'D \parallel (CB'D') \\ A'B \cap BD = \{B\} \\ A'D, BD \subset (A'BD) \end{array}\right\} \Rightarrow (A'BD)||(CB'D')$$ **4p**

b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$ și $A'O \cap AC' = \{T\}$

Cum $AA'||CC'$ și $AA' = CC' \Rightarrow ACC'A'$ paralelogram $\Rightarrow AO||A'C'$ **4p**

$ACC'A'$ paralelogram $\Rightarrow AO||A'C' \Rightarrow \Delta ATO \sim \Delta C'TA' \Rightarrow \frac{OT}{TA'} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow T$ c.g al $\Delta A'DB$ **4p**

$T \in A'O$ și $A'O \subset (A'DB) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} T \in (A'DB) \\ T \in A'O \end{array}\right\} \Rightarrow \{T\} = AC' \cap (A'BD) \Rightarrow T = G_1 \Rightarrow G_1$ este centrul de greutate al triunghiului $A'BD$ **3p**

Problema 3:

Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \sqrt{x^2 - 20} + \sqrt{72 - x^2} = 10\right\}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4x^4 - 17x^2 + 4}{2x^2 - 5x + 2} \geq 0\right\}$$

Determinați mulțimea $A \cup B$.

Barem de evaluare și notare:

Din condițiile existență pentru radical avem: $x^2 \geq 20$ și $x^2 \leq 72$ **2p**

Cum $x \in \mathbb{Z}$ și $x^2 \in [20,72] \Rightarrow x^2 \in \{25,36,49,64\}$ **3p**

Prin verificare, obținem $x = 6$, deci $A = \{-6,6\}$ **4p**

$4x^4 - 17x^2 + 4 = (2\mathrm{x} - 1)(2\mathrm{x} + 1)(\mathrm{x} - 2)(\mathrm{x} + 2)$ **2p**

$2\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 2 = (2\mathrm{x} - 1)(\mathrm{x} - 2)$ **2p**

$$\frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{2x^2 - 5x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(2x+1)(x-2)(x+2)}{(2x-1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 2) \geq 0$ **1p**

$(2x + 1)(x + 2) \geq 0$ dacă:

1) $2x + 1 \geq 0$ și $x + 1 \geq 0 \;\Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ **2p**

sau

2) $2x + 1 \leq 0$ și $x + 2 \leq 0 \;\Rightarrow x \in (-\infty, -2]$ **2p**

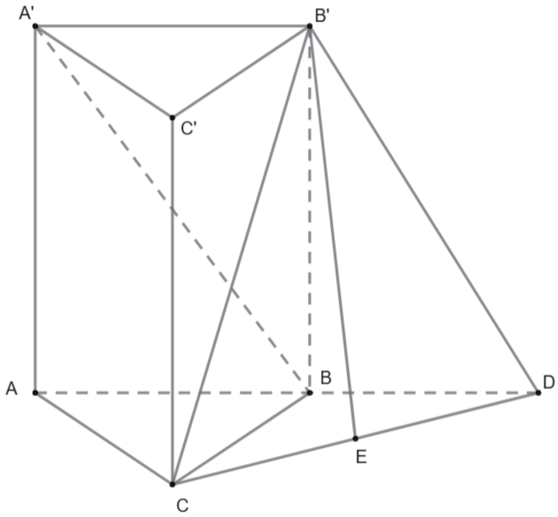
Deci $x \in (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \;\Rightarrow B = (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ **1p**

Cum $6 \in \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$ $și - 6x \in (-\infty, -2] \in\Rightarrow A \cup B = B$ **1p**

Str. 1 Decembrie, Nr.5, Bistrița, Jud. Bistrița-Năsăud, Cod 420080
Tel: +4 0263 213 529, Fax: +4 0263 216 654, E-mail: isjbn@isjbn.ro
www.isjbn.ro

Problema 4:

Se consideră o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu muchia bazei $AB = 8\ cm$ și muchia laterală $A'A = 8\sqrt{3}\ cm$. Calculați sinusul unghiului dintre dreptele $B'C$ și $A'B$.



Barem de evaluare și notare:

Desenul corect **2p**

Construim D simetricul lui A față de B **2p**

Atunci $BD||A'B'$ și $BD = A'B' \Rightarrow BDB'A'$ paralelogram **3p**

$BDB'A'$ paralelogram $\Rightarrow A'B||B'D \Rightarrow \measuredangle(A'B, B'C) = \measuredangle(B'D, B'C)$ **3p**

$B'D = B'C = 16\ cm$ **2p**

În ΔDCB, $BC = BD = 8, \measuredangle DBC = 120^o \Rightarrow DC = 8\sqrt{3}$ **4p**

Fie E mijlocul lui DC$\Rightarrow B'E \perp DC \Rightarrow B'E = 4\sqrt{13}$ cm **2p**

$A_{\Delta CB'D} = 16\sqrt{39}cm^2 \Rightarrow \sin\left(\measuredangle(B'D, B'C)\right) = \sin(\measuredangle CB'D) = \frac{\sqrt{39}}{8}$ **2p**