Prezenta lucrare conţine ______ pagini

Numele: ....
....
Inițiala prenumelui tatălui: ....
Prenumele: ....
....
Şcoala de provenienţă: ....
....
....
Centrul de examen: ....
Localitatea: ....
Judeţul: ....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2023 – 2024

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $52-2\cdot(25-5)$ este: **a)** 12 **b)** 92 **c)** 100 **d)** 1000 $52-2(25-5)=52-2\cdot 20=52-40=12.$
5p	**2.** Dacă $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{3}$, atunci rezultatul calculului $3x-5y$ este: **a)** 0 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 6 $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{3} \Leftrightarrow 5y=3(x-2) \Leftrightarrow 5y=3x-6 \Leftrightarrow 3x-5y=6.$
5p	**3.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ și $B=\{0,2,4,6,8\}$. Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea: **a)** $\{0,2,4,6,8\}$ **b)** $\{0,1,2,3,4,5,6,8\}$ **c)** $\{2,4,6\}$ **d)** $\{0,2,4,6\}$ $A\cap B=\{2,4,6\}$
5p	**4.** Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $2x+2\geq 4$ este: **a)** $(-\infty,-1]$ **b)** $(-\infty,1]$ **c)** $[-1,+\infty)$ **d)** $[1,+\infty)$ $2x+2\geq 4$ $2x\geq 4-2$ $2x\geq 2$ $x\geq \frac{2}{2}$ $x\geq 1$ $\left.\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\in\mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow x\in[1;+\infty)$

5p	**5.** Patru elevi, Ana, Ioan, Dana și Vlad determină numărul $a=\left\|2-4\sqrt{3}\right\|+2\left(\sqrt{12}+1\right)$. Rezultatele obținute de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ana	Ioan	Dana	Vlad
0	4	$4\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$

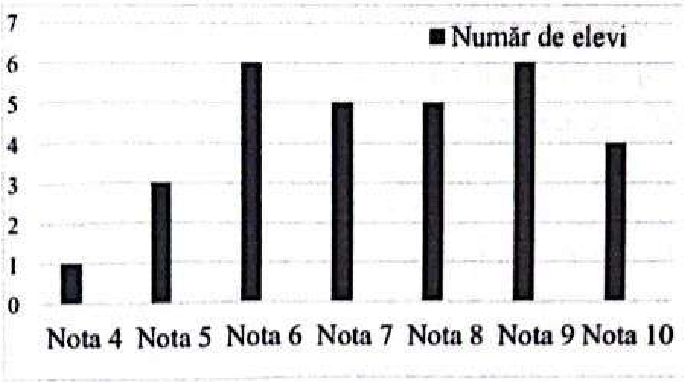
Conform informațiilor din tabel, elevul care a determinat corect numărul a este:

a) Ana
b) Ioan
c) Dana
d) Vlad

$a = |2-4\sqrt{3}| + 2\cdot(\sqrt{12}+1) = 4\sqrt{3}-\cancel{2}+2\cdot 2\sqrt{3}+\cancel{2} = 4\sqrt{3}+4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$

$|2-4\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}-2$, pt. că $2=\sqrt{4}<\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

5p **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei clase, la un test de matematică.



Afirmația: „Conform informațiilor din diagramă, jumătate din numărul elevilor acestei clase a obținut la testul de matematică cel puțin nota 8." este:

a) adevărată
b) falsă

Total elevi: $1+3+6+5+5+6+4=30$.

Nr. elevi cu cel puțin nota 8: $5+6+4=15$.

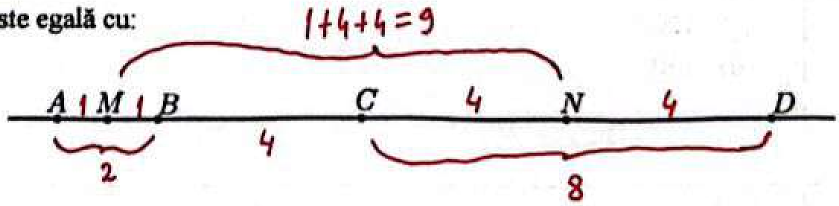
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $BC=2AB$, $CD=2BC$ și $AB=2\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB și punctul N este mijlocul segmentului CD. Lungimea segmentului MN este egală cu:

a) 4cm
b) 5cm
c) 7cm
d) 9cm

$1+4+4=9$



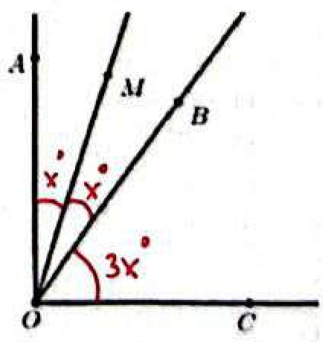
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente complementare AOB și BOC. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB și $\sphericalangle BOC = 3\cdot\sphericalangle AOM$. Măsura unghiului AOB este egală cu:

a) 18°
b) 36°
c) 40°
d) 54°

$5\cdot x^\circ = 90^\circ$

$x = 18^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle AOB = 2\cdot 18^\circ = 36^\circ$



5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = 10\text{cm}$ și $AC = 12\text{cm}$. Semidreapta BI este bisectoarea unghiului ABC și semidreapta CI este bisectoarea unghiului ACB. Paralela prin punctul I la dreapta BC intersectează dreptele AB și AC în punctele D, respectiv E. Perimetrul triunghiului ADE este egal cu:

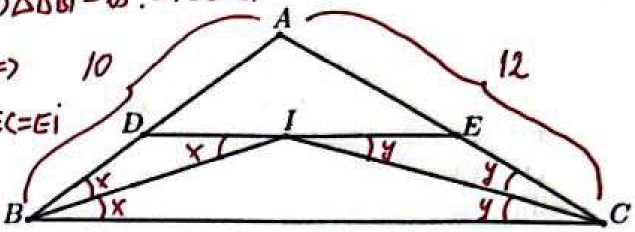
$\sphericalangle DIB \equiv \sphericalangle IBC$ (alt. int.) $\Rightarrow \Delta DBI$ – i. $\Rightarrow DB = DI$

a) 11cm $\sphericalangle EIC \equiv \sphericalangle ICB$ (alt. int.) $\Rightarrow$

b) 20cm $\Rightarrow \Delta EIC$ – i. $\Rightarrow EC = EI$

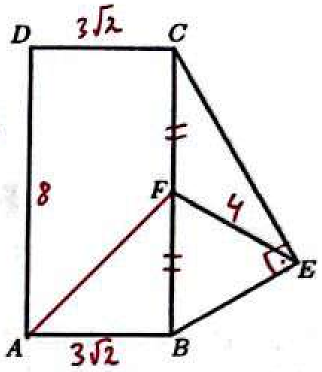
c) 22cm

d) 24cm



$\mathcal{P}_{\Delta ADE} = AD + DI + IE + AE$
$= AD + DB + EC + AE = AB + AC = 10 + 12 = 22\ (cm)$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 3\sqrt{2}\text{ cm}$ și triunghiul BEC dreptunghic în E. Punctul F este mijlocul segmentului BC și $EF = 4\text{cm}$.
Aria trapezului $AFCD$ este egală cu:



$\left.\begin{array}{l}\Delta BEC \\ \sphericalangle E = 90^\circ \\ F\text{-mij. } [BC]\end{array}\right\} \xrightarrow{T.m.} BC = 2 \cdot EF = 8\text{ cm}$

a) $6\sqrt{2}\text{ cm}^2$

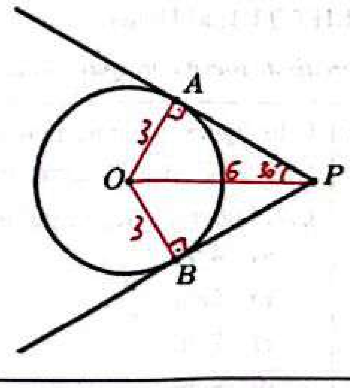
b) $12\sqrt{2}\text{ cm}^2$

c) $18\sqrt{2}\text{ cm}^2$

d) $24\sqrt{2}\text{ cm}^2$

$\mathcal{A}_{AFCB} = \frac{(AD + FC)\cdot CD}{2} = \frac{(8+4)\cdot 3\sqrt{2}}{2} =$
$= \frac{\cancel{12}^{6}\cdot 3\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 18\sqrt{2}\ (cm^2)$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul cu centrul în punctul O și raza egală cu 3 cm. Punctul P este situat la o distanță de 6 cm de centrul cercului. Dreptele PA și PB sunt tangente la cerc în punctele A și B. Măsura arcului mic AB este egală cu:



$\left.\begin{array}{l}\Delta AOP \\ \sphericalangle A = 90^\circ \\ AO = \frac{OP}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle APO = 30^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOP = 60^\circ$

a) 60°

b) 90°

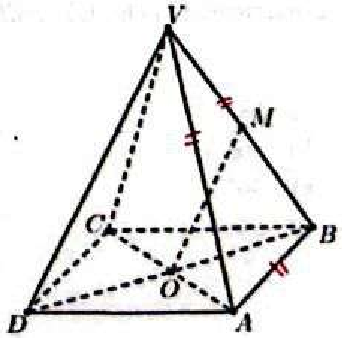
c) 120°

d) 150°

$\Rightarrow \sphericalangle AOB = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 120^\circ.$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $VA = AB$ și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și DB. Dacă punctul M este mijlocul segmentului VB, atunci măsura unghiului dreptelor OM și CD este egală cu:

ΔVAB – echilateral



a) 0° $[OM]$ – l. mij. în $\Delta VDB \Rightarrow OM \parallel VD$.

b) 30°

c) 45°

d) 60° $\sphericalangle(OM;CD) = \sphericalangle(VD;CD) = \sphericalangle VDC = 60^\circ.$

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Maria aranjează cărțile din bibliotecă și observă că dacă le grupează câte 8, câte 12 sau câte 18 îi rămân de fiecare dată 5 cărți.

(2p) a) Verifică dacă Maria poate avea în bibliotecă 53 de cărți. Justifică răspunsul dat.

$53 : 8 = 6$, $\;48$, $\;=5$ $\qquad$ $53 : 12 = 4$, $\;48$, $\;=5$ $\qquad$ $53 : 18 = 2$, $\;36$, $\;17$

R: Nu e posibil să aibă 53 de cărți în bibliotecă.

(3p) b) Determină numărul cărților din biblioteca Mariei, știind că acesta este cel mai mic număr natural de trei cifre cu proprietățile din enunț.

N.t. cu n acest nr.

$$\begin{cases} n : 8 = a, \text{ rest } 5 \\ n : 12 = b, \text{ rest } 5 \\ n : 18 = c, \text{ rest } 5 \end{cases} \xrightarrow{T.Î.R.} \begin{cases} n = 8a + 5 \\ n = 12b + 5 \\ n = 18c + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-5 = 8a \\ n-5 = 12b \\ n-5 = 18c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n-5 \,\vdots\, 8 \\ n-5 \,\vdots\, 12 \\ n-5 \,\vdots\, 18 \end{cases}$$

$\Rightarrow n-5 \,\vdots\, [8;12;18] \Rightarrow n-5 \,\vdots\, 72 \Rightarrow n-5 \in \{72, 144, 216, \ldots\} \;|+5$

$n \in \{77, 149, 221, \ldots\}$

n - cel mai mic nr. nat. de 3 cifre $\Rightarrow n = 149$.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x) = (2x+3)^2 + (x-2)(x+2) - 3(1-x) + 2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(0) = 4$.

$E(x) = 4x^2 + 12x + 9 + x^2 - 4 - 3 + 3x + 2$

$E(x) = 5x^2 + 15x + 4, \; x \in \mathbb{R}$.

$E(0) = 5 \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + 4 = 4$.

(3p) b) Arată că numărul $N = E(n) + 6$ este divizibil cu 10, pentru orice număr natural n.

$N = E(n) + 6 = 5n^2 + 15n + 4 + 6 = 5n^2 + 15n + 10 = 5(n^2 + 3n + 2)$

$= 5 \cdot \underbrace{(n+1) \cdot (n+2)}_{\text{nr. consecutive } \Downarrow \text{ produsul este nr. par}} = 5 \cdot 2k = 10k \Rightarrow N \,\vdots\, 10, \; \forall n \in \mathbb{N}$

5p 3. Se consideră numărul natural $\overline{abc}$ cu a, b, c cifre nenule, unde $a=5\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ și $b=\left(3\cdot3^2\cdot3^3\cdot3^4\right):9^4-25^4:5^7$.

(2p) a) Arată că $a=3$.

$a=5\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=5\cdot\frac{3+2+1}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}=5\cdot\frac{6}{6}-2=5-2=$
$=3.$

(3p) b) Determină numărul $\overline{abc}$, știind că numerele $\overline{ac}$ și $\overline{cb}$ sunt direct proporționale cu numerele 4 și 3.

$b=\left(3\cdot3^2\cdot3^3\cdot3^4\right):9^4-25^4:5^7=3^{10}:(3^2)^4-(5^2)^4:5^7=3^{10}:3^8-5^8:5^7=3^2-5$
$=9-5=4.$

$\{\overline{ac};\overline{cb}\}$ d.p. $\{4;3\}\Leftrightarrow\frac{\overline{3c}}{4}=\frac{\overline{c4}}{3}\Leftrightarrow3\cdot(3\cdot10+c)=4(10\cdot c+4)$

$\Leftrightarrow 90+3c=40\cdot c+16$

$37\cdot c=74$

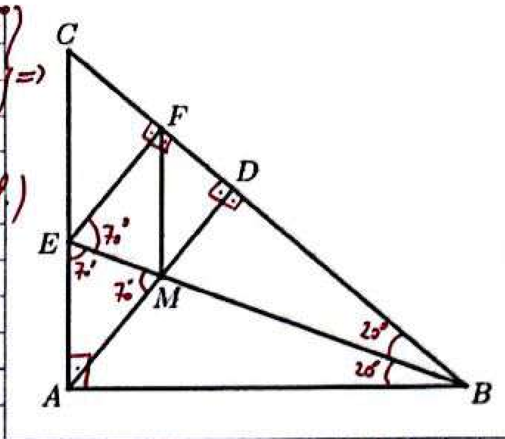
$c=2.$ $\Rightarrow\overline{abc}=342.$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$ și $\sphericalangle B = 40^\circ$. Semidreapta BE este bisectoarea unghiului ABC, punctul E aparține segmentului AC. Perpendiculara din punctul A pe BC intersectează dreapta BC în punctul D, iar perpendiculara din punctul E pe BC intersectează dreapta BC în punctul F. Dreptele BE și AD se intersectează în punctul M.

(2p) a) Arată că măsura unghiului EMA este egală cu 70°.

$\left.\begin{array}{l} BE - \text{bis. } \sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle EBC = \sphericalangle MBD = 20^\circ \\ \sphericalangle ADB = \sphericalangle MDB = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sphericalangle DMB = 70^\circ \Rightarrow \sphericalangle EMA = 70^\circ$ (op. la vf.)



(3p) b) Arată că patrulaterul $AMFE$ este romb.

$\left.\begin{array}{l} \Delta EAB \\ \sphericalangle B = 20^\circ \\ \sphericalangle A = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sphericalangle EAB = \sphericalangle EAM = 70^\circ. \\ \sphericalangle EMA = 70^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta EAM - \text{is.} \Rightarrow EA = AM. \ (1)$

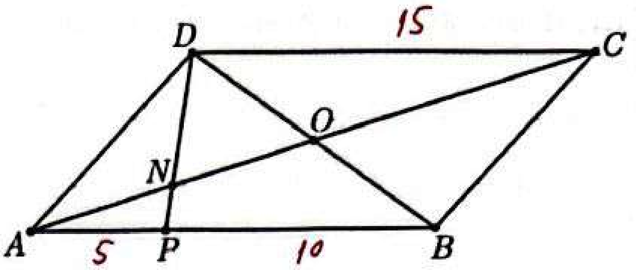
$\left.\begin{array}{l} AD \perp BC \\ EF \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AM \parallel EF \\ EM - \text{secantă} \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle FEM = \sphericalangle EMA = 70^\circ.$

$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle FEM \equiv \sphericalangle AEM \\ BE - \text{lat. com.} \\ \sphericalangle FBE \equiv \sphericalangle ABE \end{array}\right\} \overset{U.L.U}{\Longrightarrow} \Delta FEB \equiv \Delta AEB \Rightarrow EF \equiv AE \ (2)$

$\left.\begin{array}{l} EF \parallel AM \\ EF \equiv AM \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AMFE - \text{paralelogram} \\ AE \equiv EF \ (2) \end{array}\right\} \Rightarrow AMFE - \text{romb.}$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 15\text{ cm}$. Punctul P aparține laturii AB, astfel încât $PB = 2AP$ și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.

(2p) a) Arată că lungimea segmentului AP este egală cu 5 cm.



$\left.\begin{array}{l} 2\cdot AP = PB \\ AP + PB = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow AP + 2\cdot AP = 15$

$3\cdot AP = 15$

$AP = \frac{15}{3}$

$AP = 5\ (cm)$

(3p) b) Determină raportul dintre aria triunghiului ANP și aria triunghiului DNO, unde N este punctul de intersecție a dreptelor AC și DP.

$AP \parallel DC \xRightarrow{TFA} \triangle ANP \sim \triangle CND$, $k = \frac{AP}{DC} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{1}{4} \\ O - \text{mij. } [AC] \end{array}\right\} \Rightarrow N - \text{mij. } [AO]. \Rightarrow DN - \text{mediană în } \triangle DAO.$

Notăm cu x aria paralelogramului ABCD $\Rightarrow \begin{cases} A_{\triangle AOD} = \frac{x}{4} \\ A_{\triangle DOC} = \frac{x}{4}. \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} A_{\triangle ADO} = \frac{x}{4} \\ DN - \text{mediană} \end{array}\right\} \Rightarrow A_{\triangle ADN} = A_{\triangle DON} = \frac{x}{8}.$

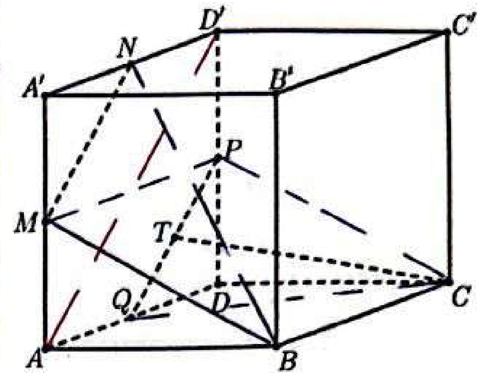
$A_{\triangle DNC} = A_{\triangle DNO} + A_{\triangle DOC} = \frac{x}{8} + {}^{2)}\frac{x}{4} = \frac{3x}{8}.$

$\triangle ANP \sim \triangle CND \Rightarrow \frac{A_{\triangle ANP}}{A_{\triangle CND}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow A_{\triangle ANP} = \frac{\frac{3x}{8}}{9} = \frac{3x}{8}\cdot\frac{1}{9} = \frac{3x}{72} = \frac{x}{24}.$

$\frac{A_{\triangle ANP}}{A_{\triangle DNO}} = \frac{\frac{x}{24}}{\frac{x}{8}} = \frac{\cancel{x}}{24}\cdot\frac{8}{\cancel{x}} = \frac{8^{(8}}{24} = \frac{1}{3}.$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctele M, N, P și Q sunt mijloacele segmentelor AA', $A'D'$, DD', respectiv AD.

(2p) a) Arată că $MN = PQ$.



$\left.\begin{array}{l} M - \text{mij. } [AA'] \\ N - \text{mij. } [A'D'] \end{array}\right\} \Rightarrow [MN] - \text{l. mij. în } \Delta AA'D'$

$\Rightarrow MN = \frac{A'D'}{2}$ (1)

$\left.\begin{array}{l} P - \text{mij. } [DD'] \\ Q \text{ mij. } [AD] \end{array}\right\} \Rightarrow [PQ] - \text{l. mij. în } \Delta ADD'$

$\Rightarrow PQ = \frac{AD'}{2}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow MN \equiv PQ$.

(3p) b) Știind că punctul T este mijlocul segmentului PQ, demonstrează că dreapta CT este paralelă cu planul (MNB).

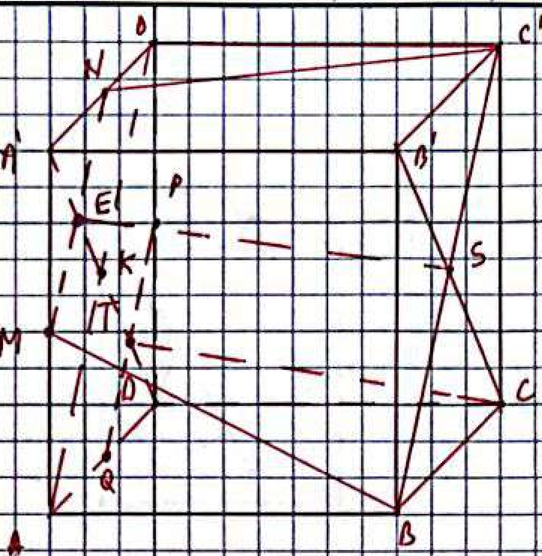
MI

$\left.\begin{array}{l} [MN] - \text{l. mij. în } \Delta AA'D' \Rightarrow MN \parallel A'D' \\ [PQ] - \text{l. mij. în } \Delta ADD' \Rightarrow PQ \parallel AD' \end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel PQ$

$MBCP$ – paralelogram $\Rightarrow MB \parallel PC$

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} MN \parallel PQ \\ MB \parallel PC \\ MN, MB \subset (MBN) \\ PQ, PC \subset (PQC) \\ MN \cap MB = \{M\} \\ PQ \cap PC = \{P\} \end{array}\right\} \Rightarrow (MBN) \parallel (PQC) \\ CT \subset (PQC) \end{array}\right\} \Rightarrow CT \parallel (MNB)$

M II



$\left.\begin{array}{l} BC' \parallel AD' \\ AD' \parallel MN \end{array}\right\} \Rightarrow BC' \parallel MN.$

$MN, MB \subset (MBN) \Rightarrow BC' \subset (MBN).$

Fie $\{S\} = BC' \cap B'C$.

Fie $\{E\} = A'D \cap MN$.

Fie $\{K\} = AD' \cap A'D$.

$\left.\begin{array}{l} A'E = EK = KT = TD = \frac{l\sqrt{2}}{4} \Rightarrow ET = 2 \cdot \frac{l\sqrt{2}}{4} = \frac{l\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)}. \\ SC = \frac{l\sqrt{2}}{2} \text{ (cm)} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow ET \equiv SC.$

$\left.\begin{array}{l} ET \equiv SC \\ ET \parallel SC \end{array}\right\} \Rightarrow TCSE$ – paralelogram $\Rightarrow TC \parallel SE$

$\left.\begin{array}{l} TC \parallel SE \\ SE \subset (MBN) \end{array}\right\} \Rightarrow TC \parallel (MBN).$