[redacted]

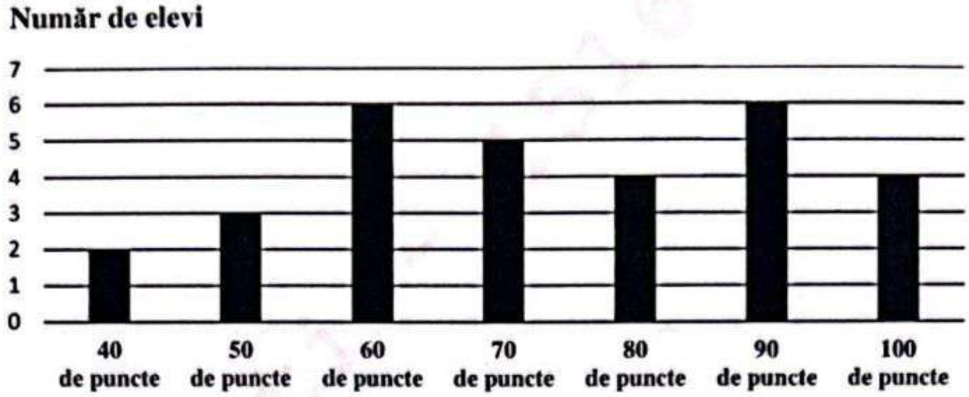
- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $4+12:2$ este egal cu: **a)** 6 **b)** 8 **c)** 10 **d)** 12 $4+12:2=4+6=10.$
5p	**2.** Știind că $\frac{a}{2}=\frac{2}{3}$, atunci $\frac{a}{4}$ este egal cu: $\frac{a}{2}=\frac{2}{3} \mid \cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{4}=\frac{2^{(2}}{6} \Rightarrow \frac{a}{4}=\frac{1}{3}$ **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{4}{3}$ **c)** 2 **d)** 3
5p	**3.** Produsul numerelor -2 și 5 este egal cu: **a)** -10 **b)** -3 **c)** 3 **d)** 10 $-2\cdot 5=-10$
5p	**4.** Soluția ecuației $6x-2=1$ este numărul: $6x-2=1 \Leftrightarrow 6x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{6} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ **a)** $-\frac{1}{3}$ **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{2}$
5p	**5.** Patru elevi, Ana, Maria, Dan și Vlad, calculează suma numerelor $a=\sqrt{3^2+4^2}$ și $b=\sqrt{3^2\cdot 4^2}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos: <table><tr><td>Ana</td><td>Maria</td><td>Dan</td><td>Vlad</td></tr><tr><td>17</td><td>19</td><td>37</td><td>43</td></tr></table>Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de: **a)** Ana **b)** Maria **c)** Dan **d)** Vlad $a=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ $b=\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{4^2}=3\cdot 4=12$ $\Rightarrow a+b=5+12=17.$

5p **6.** În diagrama de mai jos, sunt prezentate rezultatele obținute de elevii participanți la un concurs.



Afirmația „Conform informațiilor din diagramă, 5 dintre elevii participanți au obținut exact 80 de puncte." este:

a) adevărată

b) falsă

80p → 4 e.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, punctul B este mijlocul segmentului AC și punctul D este simetricul punctului B față de C. Știind că $AD = 12$ cm, lungimea segmentului AC este egală cu:

a) 3 cm

b) 4 cm

c) 6 cm

d) 8 cm

12:3=4

AC=2·4=8 (cm)

5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente AOB și BOC, $\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle AOB$. Măsura unghiului AOC este egală cu 120° și semidreapta OM este bisectoarea unghiului BOC. Măsura unghiului AOM este egală cu:

$120^\circ : 3 = 40^\circ$

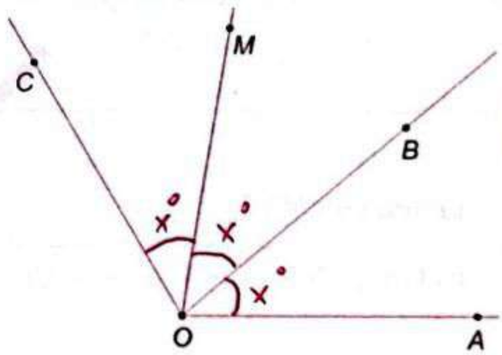
$\sphericalangle AOM = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$.

a) 30°

b) 40°

c) 60°

d) 80°



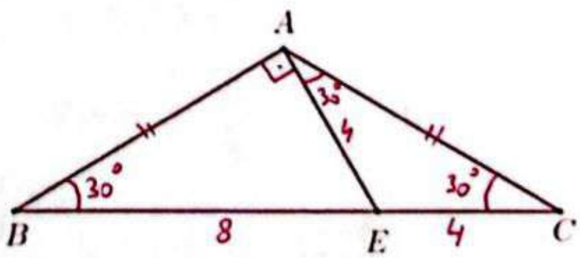
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC, cu $\sphericalangle BAC = 120^\circ$. Punctul E aparține segmentului BC, astfel încât $CE = 4$ cm, iar dreptele AB și AE sunt perpendiculare. Lungimea segmentului BC este egală cu:

a) 16 cm

b) 12 cm

c) 8 cm

d) 6 cm



5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 3 \cdot BC$. Perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este egal cu $32\,\text{cm}$. Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu:

a) $16\,\text{cm}^2$
b) $32\,\text{cm}^2$
c) $48\,\text{cm}^2$
d) $64\,\text{cm}^2$

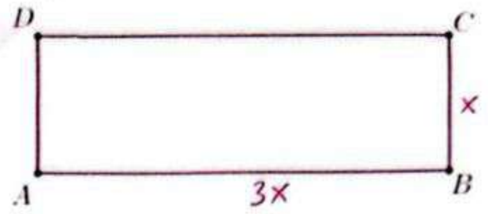
$2 \cdot 3x + 2 \cdot x = 32$

$8x = 32$

$x = 4 \Rightarrow BC = 4\text{ cm}$

$AB = 12\text{ cm}$

$\mathcal{A} = 12 \cdot 4 = 48 (\text{cm}^2)$

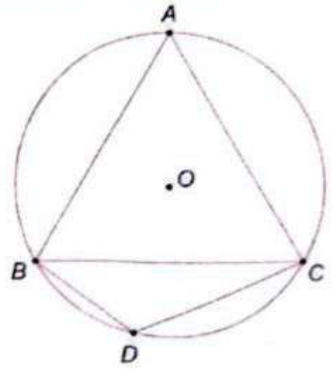


5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, înscris în cercul de centru O. Punctul D aparține arcului mic BC. Măsura unghiului BDC este egală cu:

a) $60°$
b) $90°$
c) $120°$
d) $150°$

$\widehat{AB} = \widehat{AC} = 120° \Rightarrow \widehat{BAC} = 240°$

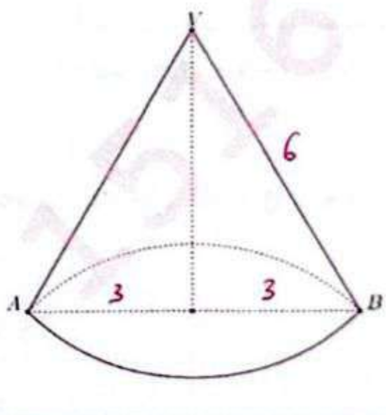
$\Rightarrow \sphericalangle BDC = \frac{240°}{2} = 120°.$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat conul circular drept cu secțiunea axială triunghiul echilateral VAB, cu $AB = 6$ cm. Aria laterală a conului este egală cu:

a) $18\pi\,\text{cm}^2$
b) $27\pi\,\text{cm}^2$
c) $36\pi\,\text{cm}^2$
d) $54\pi\,\text{cm}^2$

$\mathcal{A}_l = \pi \cdot R \cdot G = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi\ (\text{cm}^2)$



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Ana a cumpărat de la o librărie caiete, pixuri și creioane. Prețul unui pix este egal cu 75% din prețul unui caiet, iar prețul unui creion este egal cu 40% din prețul unui pix.

(2p) a) Este posibil ca prețul a opt pixuri să fie egal cu prețul a cinci caiete? Justifică răspunsul dat.

Notăm: x - prețul unui pix, y - prețul unui caiet, z - prețul unui creion.

$x = \frac{75}{100} \cdot y = \frac{3y}{4}$

$z = \frac{40}{100} \cdot x = \frac{2x}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3y}{4} = \frac{3y}{10}$

$8 \cdot x \stackrel{?}{=} 5 \cdot y$

$8 \cdot x = 8 \cdot \frac{3y}{4} = 6y \neq 5y.$

R: Nu e posibil.

(3p) b) Dacă Ana a plătit pentru trei caiete, patru pixuri și cinci creioane suma de 45 de lei, determină prețul unui caiet.

$3y + 4x + 5z = 45$

$3y + \cancel{4} \cdot \frac{3y}{\cancel{4}} + 5 \cdot \frac{3y}{10_2} = 45$

$3y + 3y + \frac{3y}{2} = 45 \mid \cdot 2$

$6y + 6y + 3y = 90$

$15y = 90$

$y = \frac{90}{15}$

$y = 6$ (lei)

R: Un caiet costa 6 lei.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x}+\frac{2}{x+3}\right):\frac{1}{x^2-3x}$, unde x este număr real, $x\neq-3$, $x\neq0$ și $x\neq3$.

(2p) a) Arată că $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x}+\frac{2}{x+3}=\frac{x^2+27}{x(x-3)(x+3)}$, pentru orice număr real x, $x\neq-3$, $x\neq0$ și $x\neq3$.

$^{x(x+3))}\frac{2}{x-3} - {}^{x^2-9)}\frac{3}{x} + {}^{x(x-3))}\frac{2}{x+3} = \frac{2x^2 \cancel{+6x} - 3x^2 + 27 + 2x^2 \cancel{-6x}}{x(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+27}{x(x-3)(x+3)}$,

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$

(3p) b) Demonstrează că $E(n)>6$, pentru orice număr natural n, $n\neq0$, $n\neq3$.

$E(x) = \frac{x^2+27}{\cancel{x(x-3)}(x+3)} \cdot \frac{\cancel{x(x-3)}}{1} = \frac{x^2+27}{x+3}$

$E(n) > 6 \iff \frac{n^2+27}{n+3} > {}^{n+3)}\frac{6}{1} \iff \frac{n^2+27}{n+3} > \frac{6n+18}{n+3} \mid \cdot n+3$, $n+3>0$

$\iff n^2+27 > 6n+18$

$n^2-6n-18+27>0 \iff n^2-6n+9>0$

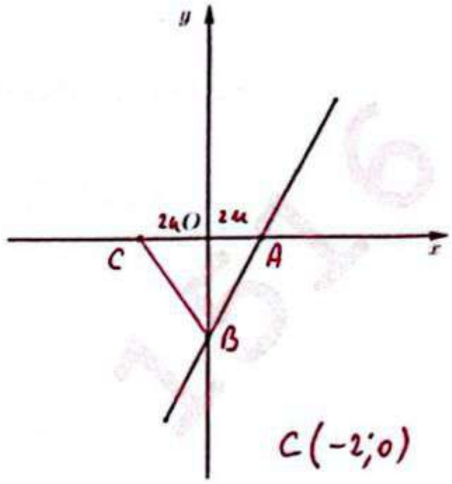
$(n-3)^2>0$ „A", $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,3\}$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$.

(2p) a) Arată că $f(2)-f(0)=4$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2\cdot 2-4=4-4=0 \\ f(0)=2\cdot 0-4=0-4=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(2)-f(0)=0-(-4)=0+4=4.$



$C(-2;0)$

(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Punctul C este simetricul punctului A față de axa Oy. Arată că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $4\left(\sqrt{5}+1\right)$.

$G_f \cap O_x=\{A(2;0)\} \Rightarrow C(-2;0)$

$G_f \cap O_y=\{B(0;-4)\}$

$AC=OA+OC=2+2=4(u)$

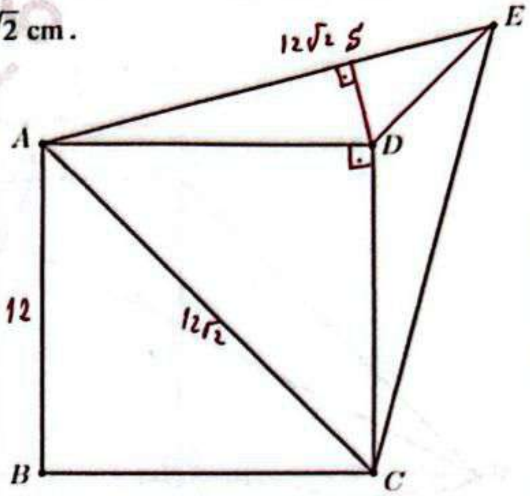
$AB=\sqrt{(2-0)^2+(0+4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}(u)$

$BC=\sqrt{(-2-0)^2+(0+4)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}(u)$

$P_{\triangle ABC}=AB+AC+BC=2\sqrt{5}+4+2\sqrt{5}=4\sqrt{5}+4=4(\sqrt{5}+1)\ (u).$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral ACE, astfel încât punctele D și E sunt situate de aceeași parte a dreptei AC. Perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 48cm.

(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului ACE este egal cu $36\sqrt{2}$ cm.



$P_{ABCD} = 48\ cm \Rightarrow AB = \frac{48}{4} = 12\ (cm)$

$\Rightarrow AC = 12\sqrt{2}\ (cm)$

$P_{\Delta ACE} = 3 \cdot AC = 3 \cdot 12\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\ (cm)$

(3p) b) Arată că distanța de la punctul D la dreapta AE este egală cu $3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$cm.

$A_{\Delta ACE} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(12\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{288\sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3}\ (cm^2)$

$A_{\Delta ADC} = \frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72\ (cm^2)$

$\left.\begin{array}{l} [AE] \equiv [CE] \\ DE - l.c. \\ [AD] \equiv [CD] \end{array}\right\} \xRightarrow{LLL} \Delta ADE \equiv \Delta CDE \Rightarrow 2 \cdot A_{\Delta ADE} = 72\sqrt{3} - 72\ (cm^2)$

$\Rightarrow A_{\Delta ADE} = 36\sqrt{3} - 36 = 36(\sqrt{3}-1)\ (cm^2)$

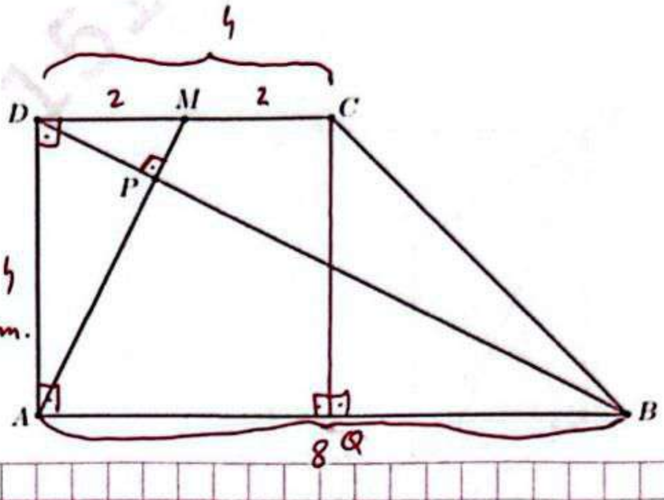
$\Rightarrow \frac{AE \cdot d(D;AE)}{2} = 36(\sqrt{3}-1)$

$\frac{\cancel{12}^{6}\sqrt{2} \cdot d(D;AE)}{\cancel{2}} = 36(\sqrt{3}-1)$

$d(D;AE) = \frac{36(\sqrt{3}-1)}{6\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\ (cm).$

5p 5. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel DC$, $\sphericalangle DAB = 90°$, $AB = 8$ cm și $AD = DC = 4$cm. Punctul M este mijlocul segmentului DC și P este punctul de intersecție a dreptelor AM și BD.

(2p) a) Arată că $BC = 4\sqrt{2}$ cm.



Fie $CQ \perp AB$, $Q \in AB$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AQCD \text{ - dreptunghi} \\ AD = DC \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AQCD$ - pătrat $\Rightarrow CQ = AQ = 4$cm.

$\Rightarrow QB = 4$ cm $\Rightarrow \Delta CQB$ - dr. și isoscel $\Rightarrow BC = 4\sqrt{2}$ (cm).

(3p) b) Calculează aria patrulaterului $MPBC$.

$DM \parallel AB \xRightarrow{TFA} \Delta DPM \sim \Delta BPA$, $k = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. $\Rightarrow \frac{MP}{PA} = \frac{1}{4}$, $\frac{DP}{PB} = \frac{1}{4}$.

$\left.\begin{array}{l} \Delta ADM \\ \sphericalangle D = 90° \end{array}\right\} \xRightarrow{TP} AM^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow AM = 2\sqrt{5}$ (cm)

$\left.\begin{array}{l} \Delta ADB \\ \sphericalangle A = 90° \end{array}\right\} \xRightarrow{T.P.} DM^2 = 16 + 64 = 80 \Rightarrow DB = 4\sqrt{5}$ (cm).

$\frac{MP}{PA} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{MP}{MP+PA} = \frac{1}{1+4} \Leftrightarrow \frac{MP}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \Rightarrow MP = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (cm)

$\frac{DP}{PB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{DP}{DP+PB} = \frac{1}{1+4} \Leftrightarrow \frac{DP}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \Rightarrow DP = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ (cm)

$\left.\begin{array}{l} DM^2 = 4 \\ DP^2 + PM^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{20}{25} + \frac{80}{25} = 4 \end{array}\right\} \xRightarrow{R.T.P.} \sphericalangle DPM = 90°$.

$A_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot AD}{2} = \frac{(4+8) \cdot 4}{2} = 24$ (cm²).

$A_{\Delta ADB} = \frac{AD \cdot AB}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = \frac{32}{2} = 16$ (cm²)

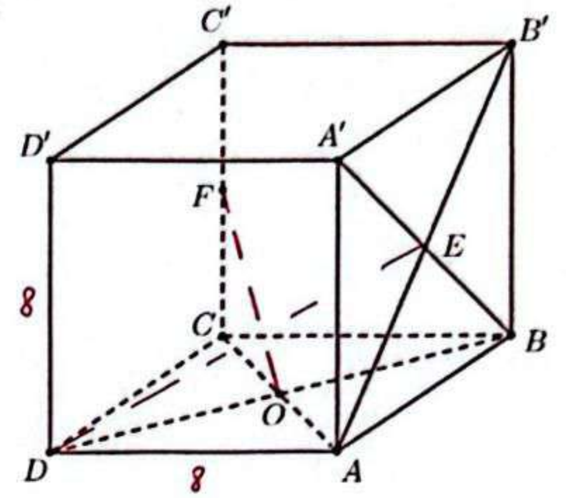
$A_{\Delta DPM} = \frac{DP \cdot PM}{2} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{\frac{40}{25}}{2} = \frac{40}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$ (cm²)

$\Rightarrow A_{MPBC} = 24 - 16 - \frac{4}{5} = \frac{8}{1} - \frac{4}{5} = \frac{40}{5} - \frac{4}{5} = \frac{36}{5} = \frac{72}{10} = 7{,}2$ (cm²).

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 8$ cm. Dreptele AC și BD se intersectează în punctul O, iar dreptele $A'B$ și AB' se intersectează în punctul E. Punctul F este mijlocul segmentului CC'.

(2p) a) Arată că volumul cubului $ABCDA'B'C'D'$ este egal cu 512 cm^3.

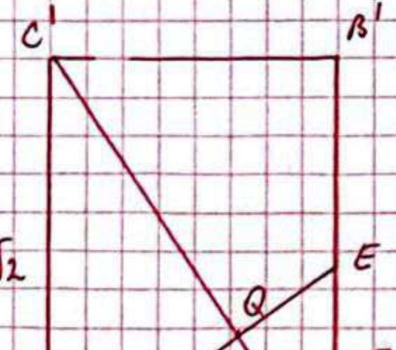
$V = l^3 = 8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512\ (\text{cm}^3).$



(3p) b) Demonstrează că dreptele FO și DE sunt perpendiculare.

$\left.\begin{array}{l} F - \text{mij. } [CC'] \\ O - \text{mij. } [AC] \end{array}\right\} \Rightarrow [FO]$ – linie mij. în $\Delta C'CA \Rightarrow FO \parallel C'A$.

$\Rightarrow \sphericalangle(FO; DE) = \sphericalangle(C'A; DE)$.



Fie $\{Q\} = DE \cap C'A$.

$\left.\begin{array}{l} \Delta ADE \\ \sphericalangle A = 90^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{T.P.} DE^2 = 64 + 32 = 96$

$DE = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ cm.

$\left.\begin{array}{l} \Delta C'DA \\ \sphericalangle D = 90^\circ \end{array}\right\} \xRightarrow{T.P.} AC'^2 = 64 + 128 = 192$

$AC' = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$ cm.

$AE \parallel DC' \xRightarrow{T.F.A.} \Delta AEQ \sim \Delta C'DQ$, $k = \frac{4\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{QE}{QD} = \frac{AQ}{QC'} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{QE}{QD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{QE}{4\sqrt{6}} = \frac{1}{3} \Rightarrow QE = \frac{4\sqrt{6}}{3}\ (\text{cm}) \\ \frac{AQ}{QC'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AQ}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow AQ = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ (\text{cm}) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} QE^2 + QA^2 = \left(\frac{4\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{96}{9} + \frac{192}{9} = \frac{288}{9} = 32 \\ AE^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32 \end{array}\right\} \xRightarrow{R.T.P.} \sphericalangle EQA = 90^\circ$

$\Rightarrow \sphericalangle(C'A; DE) = 90^\circ \Rightarrow FO \perp DE$